Nella scorsa lezione:

TEOREMA (DI ESISTENZA DELLA RADICE N-ESIMA)

Sia $y \in \mathbb{R}$ e sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

1) Se n è pari e $\boxed{y \geq 0}$, allora $\exists! \, x \in \mathbb{R}$ t.c. $x \geq 0$ e $x^n = y$.

2) Se n è dispari, allora $\exists! \, x \in \mathbb{R}$ t.c. $x^n = y$ (x e y hanno lo stesso segno).

<u>Def</u>: In entrambi i casi, x è detto RADICE N-ESIMA di y e si indica con $\sqrt[n]{y}$.

<u>Ricordare</u>

1) Se n è pari: $\sqrt[n]{y}$ è definita solo per $y \geq 0$ e $\sqrt[n]{y} \geq 0$.

2) Se n è dispari $\sqrt[n]{y}$ è sempre definita e $\sqrt[n]{y}$ ha sempre lo stesso segno di y.

3) $\sqrt[n]{y} = 0 \iff y = 0$.

4) $\sqrt[n]{y} > 0 \iff y > 0$.

] vero sia per n pari che per n dispari.

Potenze

Possiamo definire le potenze in modo diverso se l'esponente è naturale intero, razionale o irrazionale

Def

1) Se $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ (n volte)

2) Se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $x^0 = 1$.

3) Se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:
$$x^{-n} := \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x} \text{ (n volte)}$$

4) Sia $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Siano $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Definiamo $x^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{x^n}$

5) Se $x \in \mathbb{R}$, e $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:
$$x^{-\frac{n}{m}} := \frac{1}{x^{\frac{n}{m}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$$

Cosa significa 2^{π} ?

6) Sia $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$ e sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Definiamo:
$$x^{\alpha} := \sup \{ x^q \mid q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } q < \alpha \}$$

7) Se $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$ e sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Definiamo $x^{\alpha} := \inf \{ x^q \mid q \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } q < \alpha \}$

8) Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$: $0^\alpha = 0$.

ESEMPI

1) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2^1} = \sqrt{2}$

2) $2^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

3) $2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4}$

4) $10^{-\frac{5}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10^5}} = \dfrac{1}{\sqrt{100\,000}}$

Nota: $(-1)^{\frac{1}{3}}$ non è definito!

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$$
$$\|$$
$$(-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$$

RISULTATI INCOMPATIBILI

Quindi $(-1)^{\frac{1}{3}}$ non è ben definito

In generale le potenze del tipo $x^{\frac{n}{m}}$ non sono definite se $x < 0$ (e $\frac{n}{m} \notin \mathbb{Z}$).

PROPRIETÀ DELLE POTENZE.

1) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad x^0 = 1$
e $\forall x \in \mathbb{R}$: $\quad x^1 = x$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ x>0$ e $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha}\cdot x^{\beta}$$

3) $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x>0$ e $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$$

4) $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x>0$ e $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$:
$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}.$$

5) $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x>0$ e $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}}$$

6) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y>0$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:
$$x^{\alpha}\cdot y^{\alpha} = (x\cdot y)^{\alpha}$$

7) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y>0$ e $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$:
$$\frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}$$

8) $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x>0$ e $x \neq 1$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$x^{\alpha} = x^{\beta} \iff \alpha = \beta$$

9) Se $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$x^{\alpha} \leq x^{\beta} \iff \alpha \leq \beta$$
$$x^{\alpha} \geq x^{\beta} \iff \alpha \geq \beta$$
$$x^{\alpha} < x^{\beta} \iff \alpha < \beta$$
$$x^{\alpha} > x^{\beta} \iff \alpha > \beta$$

10) Se $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{0 < x < 1}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$x^{\alpha} \leq x^{\beta} \iff \alpha \geq \beta$$
$$x^{\alpha} \geq x^{\beta} \iff \alpha \leq \beta$$
$$x^{\alpha} > x^{\beta} \iff \alpha < \beta$$
$$x^{\alpha} < x^{\beta} \iff \alpha > \beta$$

ESEMPI

1) $$\frac{(5^2 \cdot 5^3)^8}{5^{15}} = \frac{(5^5)^8}{5^{15}} = \frac{5^{40}}{5^{15}} = 5^{40-15} = 5^{25}$$

2) $$2^8 \cdot 6^{-4} \cdot 3^2 = 2^8 \cdot \underbrace{(2 \cdot 3)^{-4}}_{2^{-4} \cdot 3^{-4}} \cdot 3^2$$
$$= 2^8 \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 3^2$$
$$= 2^4 \cdot 3^{-2} = \frac{2^4}{3^2} = \frac{16}{9}$$

3) La metà di 8^{10}?

$$\frac{8^{10}}{2} = \frac{(2^3)^{10}}{2} = \frac{2^{30}}{2} = 2^{29}$$

4) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2^2}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{2-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$

Si può scrivere anche

$$\sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

OSS

Se $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$:

$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$ (prop. 6)

$\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ (prop. 7)

Attenzione

$$\sqrt[n]{x \pm y} \neq \sqrt[n]{x} \pm \sqrt[n]{y}$$

$$(x+y)^n \neq x^n + y^n$$

ESEMPI (Potenze di un binomio)

$(x+y)^0 = 1$

$(x+y)^0 = x+y$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2$
$\quad + 4xy^3 + y^4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

(TRIANGOLO DI TARTAGLIA)

Quadrato di somme con più termini

- $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$
- $(x_1+x_2+\dots+x_n)^2$

$$
\begin{aligned}
= \; & x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 && \text{quadrati} \\
& + 2x_1x_2 + \dots + 2x_1x_n \\
& + 2x_2x_3 + \dots + 2x_2x_n && \text{doppi prodotti} \\
& + \\
& \vdots \\
& + 2x_{n-1}x_n
\end{aligned}
$$

Equazioni e disequazioni irrazionali (cioè con radici)

Tipo più semplice:

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x)$$
$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x)$$
$$\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x)$$
$$\sqrt[n]{a(x)} > b(x)$$
$$\sqrt[n]{a(x)} < b(x)$$

Per risolverle bisogna distinguere il caso in cui n è dispari da quello in cui n è pari

- Caso n dispari: (Facile! Basta elevare alla n)

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \iff a(x) = b(x)^n$$

$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x) \iff a(x) \geq b(x)^n$$

$$\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x) \iff a(x) \leq b(x)^n$$

$$\sqrt[n]{a(x)} > b(x) \iff a(x) > b(x)^n$$

$$\sqrt[n]{a(x)} < b(x) \iff a(x) < b(x)^n$$

ESEMPIO

$$\sqrt[3]{2x^2 - x} = x \quad \text{(elevo alla terza)}$$

$$2x^2 - x = x^3$$

$$x^3 = 2x^2 - x$$

$$x^3 - 2x^2 + x = 0$$

$$x(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$x(x-1)^2 = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 1.$$

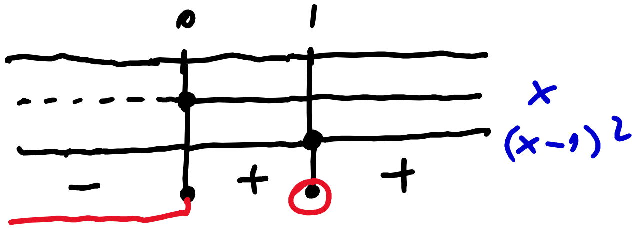
Per le disequazioni si procede in modo simile:

$$\sqrt[3]{2x^2 - x} \geq x$$

$$2x^2 - x \ge x^3$$

$$x^3 \le 2x^2 - x$$

$$x(x-1)^2 \le 0$$



Soluzioni: $x \le 0 \quad \vee \quad x = 1.$

Caso n pari:

Non sempre si può elevare alla n:

$\sqrt{x-2} = -1$ impossibile

Se n è pari, si può elevare alla n solo sapendo che la radice è ben definita e che entrambi i membri dell'uguaglianza sono ≥ 0

Metodo risolutivo per le equazioni se n è pari:

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x) \iff \begin{cases} a(x) \ge 0 \\ b(x) \ge 0 \\ a(x) = b(x) \end{cases}$$

In modo simile se n è pari, nelle disequazioni si può elevare alla n

solo se entrambi i membri sono ≥ 0.
Nel caso $\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x)$ o $\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x)$ vanno trascurati o considerati a seconda del verso della disuguaglianza

- $\sqrt{x-2} \leq -1$ impossibile
- $\sqrt{x-2} \geq -1$ sempre vero se $\sqrt{x-2}$ è definita, cioè $x-2 \geq 0$ $x \geq 2$.

Metodo per $\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x)$ o $\sqrt[n]{a(x)} < b(x)$ (n pari)

$$\sqrt[n]{a(x)} \leq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) \leq b(x)^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} < b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) < b(x)^n \end{cases}$$

Metodo per $\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x)$ o $\sqrt[n]{a(x)} > b(x)$ ($\underline{n \text{ pari}}$)

$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x)^n \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a(x)} \geq b(x) \iff \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ a(x) \geq b(x)^n \end{cases} \vee \begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

$$\sqrt{2x^2-3} = x$$

$$\begin{cases} 2x^2-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x^2-3 = x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - \frac{3}{2} \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \vee \quad x \leq -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x \geq 0 \\ x^2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \vee \quad x \leq -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x \geq 0 \\ x = \sqrt{3} \quad \vee \quad x = \cancel{-\sqrt{3}} \end{cases}$$

NO

$$x = \sqrt{3}$$

ESEMPIO 2

$$\sqrt{4-x^2} \leq 2x-1$$

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 4-x^2 \leq (2x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 4-x^2 \leq 4x^2-4x+1 \quad * \end{cases}$$

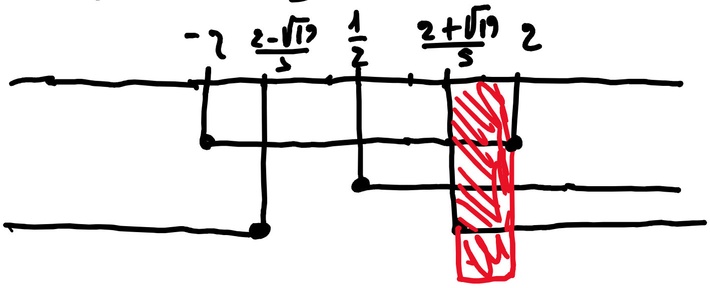
$$4x^2-4x+1 \geq 4-x^2$$

$$5x^2-4x-3 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+15}}{5} = \frac{2 \pm \sqrt{19}}{5}$$

$$x \geq \frac{2+\sqrt{19}}{5} \quad \vee \quad x \leq \frac{2-\sqrt{19}}{5}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{2+\sqrt{19}}{5} \quad \vee \quad x \leq \frac{2-\sqrt{19}}{5} \end{cases}$$



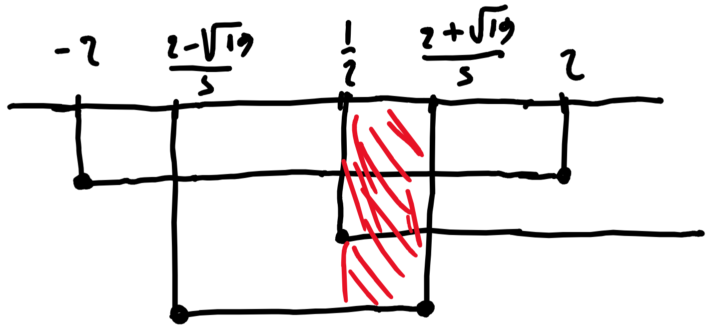
Soluzioni: $\frac{2+\sqrt{19}}{5} \leq x \leq 2$.

ESEMPIO 3

$$\sqrt{4-x^2} \geq 2x-1$$

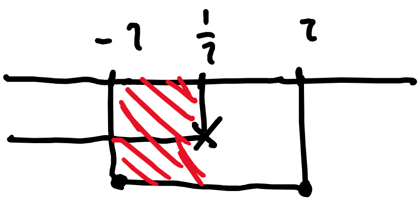
$$① \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 4-x^2 \geq (2x-1)^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 < 0 \end{cases} ②$$

$$① \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{2-\sqrt{19}}{5} \leq x \leq \frac{2+\sqrt{19}}{5} \end{cases}$$



$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2+\sqrt{19}}{5}$$

$$② \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$-2 \leq x < \frac{1}{2}$$

Conclusione: $-2 \leq x < \frac{1}{2} \quad \vee \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2+\sqrt{19}}{5}$

cioè $\quad -2 \leq x \leq \frac{2+\sqrt{19}}{5}$

Non sempre questi metodi sono i più rapidi:

ESEMPIO

$$x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$$

- Con i metodi precedenti:

$$3\sqrt{x} = 4 - x$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ 9x = (4-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 4 \\ 9x = 16 - 8x + x^2 \end{cases}$$

$$x^2 - 17x + 16 = 0$$

$$(x-1)(x-16) = 0$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 16$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 4 \\ x = 1 \quad \vee \quad \cancel{x = 16} \end{cases}$$ non è ≤ 4.

$x = 1$ è l'unica soluzione.

Metodo alternativo: Si può fare una sostituzione.

$$x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$$

$$t = \sqrt{x}$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

$t = 1 \quad \vee \quad t = -4$

$\sqrt{x} = 1 \quad \vee \quad \sqrt{x} = -4$
(impossibile)

$\sqrt{x} = 1$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$x = 1.$

Esponenziali e logaritmi

- Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, x variabile

  x^{α} (POTENZA)

- Sia $a \in \mathbb{R}$, x variabile:

  a^x (ESPONENZIALE)

Dato $y \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ci chiediamo quando è possibile trovare $x \in \mathbb{R}$ t.c.

$$a^x = y$$ (EQUAZIONE ESPONENZIALE IN BASE a)

- Se $a = 1$:

  In questo caso $1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

  Se $y \neq 1$ no soluzioni

  Se $y = 1$, ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione.

- Se $y \leq 0$ l'equazione $a^x = y$ non ha soluzione.

Nei casi rimanenti ($a > 0, a \neq 1, y > 0$) esiste sempre un'unica soluzione.

TEOREMA (TEOREMA DI ESISTENZA DEI LOGARITMI)
Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Sia $y \in \mathbb{R}$ $y > 0$. Allora $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ t.c. $a^x = y$.

Def Nelle ipotesi del teorema il numero x si dice LOGARITMO in base a di y e si indica con $\log_a y$

Se $a > 0$, $a \neq 1$ e $y > 0$, allora:

$$a^x = y \iff x = \log_a y$$

ESEMPI

$\log_2 16 = 4$

$\log_{10} 1000 = 3$ $\quad (10^3 = 1000)$

$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ (perché $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$)

$\log_9 27 = \log_9(3^3) = \log_9(\sqrt{9}^3) = \log_9(9^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2}$

Notazioni

- Se $a = e$
  invece di $\log_e y$ si scrive $\ln y$
  oppure $\log y$ (LOGARITMO NATURALE)
- $a = 10$, $\log_{10} y$ si indica con Log

Due esempi

1) Magnitudo dei terremoti

$$M = \text{Log}\, A - \text{Log}\, A_0 = \log_{10} A - \log_{10} A_0$$

(A ampiezza oscillazioni
A_0 ampiezza di riferimento)

2) pH di una soluzione:

$$pH = -\ln(H^+)$$

H^+ concentrazione molare degli ioni di idrogeno